1. CLASA a VIII a OLM

Fie $a, b \in \mathbb{R}$, astfel încât

$$a^2 + b^2 - 3a - 5b + \frac{33}{4} = 0.$$

Să se demonstreze că $4 \leq a+b+1 \leq 6$.

G.M.B 10/2009

BAREM DE CORECTARE

1p $$4a^2 + 4b^2 - 12a - 20b + 33 = 0$$

1p $$4a^2 - 12a + 9 + 4b^2 - 20b + 25 = 1$$

1p $$(2a-3)^2 + (2b-5)^2 = 1$$

2p $$-1 \leq 2a-3 \leq 1$$
$$-1 \leq 2b-5 \leq 1$$

1p $$1 \leq a \leq 2$$
$$2 \leq b \leq 3$$

1p $$4 \leq a+b+1 \leq 6$$

ASA a VIII a   OLM

Să se determine numerele întregi m şi n, dacă

$$\frac{m}{\sqrt{2(2+\sqrt{3})}} + \frac{n}{\sqrt{2(2-\sqrt{3})}} = \sqrt{19-8\sqrt{3}}$$

Ion. Tiotioi

BAREM DE CORECTARE

(2p) $\sqrt{2(2+\sqrt{3})} = \sqrt{4+2\sqrt{3}} = \sqrt{(\sqrt{3}+1)^2} = \sqrt{3}+1$

$\sqrt{2(2-\sqrt{3})} = \sqrt{4-2\sqrt{3}} = \sqrt{(\sqrt{3}-1)^2} = \sqrt{3}-1$

(2p) $\dfrac{m}{\sqrt{3}+1} + \dfrac{n}{\sqrt{3}-1} = 4-\sqrt{3}$

$(\sqrt{3}-1)m + (\sqrt{3}+1)n = 4-\sqrt{3}$

(4p) $(-m+n)+(m+n)\sqrt{3} = 2(4-\sqrt{3})$

(2p) $\begin{cases} -m+n = 8 \\ m+n = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -5 \\ n = 3 \end{cases} \Rightarrow S=\{(-5;3)\}$

$m, n \in \mathbb{Z}$

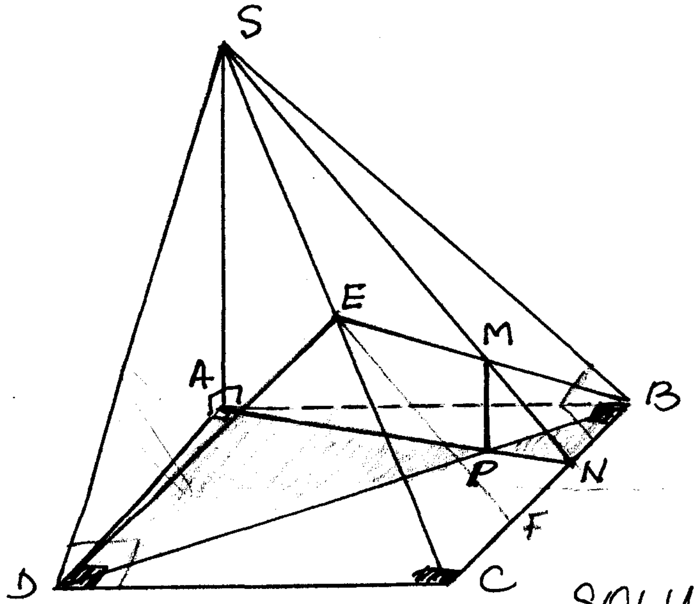
PROPUNERE - OLIMPIADĂ - CLASA a VIII-a

Pe planul dreptunghiului ABCD ($[AB]>[BC]$) se ridică perpendiculara SA. Dacă E este mijlocul segmentului $[SC]$ se cere:

a) Demonstrați că triunghiul DEB este isoscel.

b) Arătați că $[BD]<[SC]$

c) Dacă M este mijlocul lui $[BE]$, $SM \cap BC=\{N\}$ iar $BD \cap AN=\{P\}$, arătați că $MP \parallel (SAD)$.



PROF. NICOLAE JURUBIȚĂ

- MEDGIDIA -

SOLUȚIE

a) Demonstrează că $SB \perp BC$ și $SD \perp DC$ 1p

Demonstrează că $BE=\frac{1}{2}SC$ și $DE=\frac{1}{2}SC \Rightarrow [BE]\equiv[DE]$ 1p

b) În ΔBDE : $[BD]<[BE]+[DE]$ 0,5p

dar $[BE]+[DE]=\frac{1}{2}[SC]+\frac{1}{2}[SC]=[SC] \Rightarrow [BD]<[SC]$ ... 0,5p

c) Construiește $EF \parallel SN \Rightarrow MN=$ linie mijl. în $\Delta BEF \Rightarrow [MN]=\frac{1}{2}[EF]$ 0,5p

$\Rightarrow [BN]\equiv[NF]$ și $[EF]=2[MN]$. Dacă $[EF]=2a$; $[MN]=a$ 0,5p

În ΔSNC : $EF=$ l. mijl. $\Rightarrow [SN]=2[EF]=4a \Rightarrow [CF]\equiv[FN]$ 0,5p

Arată că $[BN]=\frac{1}{3}[BC] \Rightarrow [BN]=\frac{1}{3}[AD]$ 0,5p

Dem. că $\Delta PBN \sim \Delta PDA \Rightarrow \frac{PN}{PA}=\frac{BN}{AD}=\frac{1}{3}$ 0,5

În ΔNSA: $\frac{NM}{MS}=\frac{1}{3}=\frac{PN}{NA} \xrightarrow{R.T.TH} MP \parallel SA$ 1p

Deoarece : $\left.\begin{array}{l} MP \parallel SA \\ SA \subset (SAD) \end{array}\right\} \Rightarrow MP \parallel (SAD)$ 0,5p

TOTAL = 7p.

A a VIII^a OLM

~~ie~~ cubul ABCDA'B'C'D' cu latura de 9 cm.
Din fiecare vârf se înlătură câte o piramidă regulată cu muchiile laterale de 3 cm.

a) Calculeți aria totală a corpului obținut.

b) Calculați lungimea segmentului pe diagonala cubului de planele bazelor piramidelor.

~~Numero~~ Se numerotează fiecare vârf al corpului cu numere de la 1 la 24.

Notăm cu S_K, $K \in \{1, \dots, 8\}$, suma numerelor corespunzătoare vârfurilor ~~unui triunghi~~ unei fețe triunghiulare a corpului.

c) Arătați că există o numerotare a vârfurilor astfel încât $S_K \vdots 3$, $\forall K$, $K \in \{1, \dots, 8\}$.

d) Arătați că nu există o numerotare a vârfurilor astfel încât

$$3 \nmid S_i \text{ și } 3 \mid S_j, \text{ unde } j \in \{1, \dots, 8\} \setminus \{i\}$$

prof. ALEX. CARNARU

BAREM DE CORECTARE

(2p) a) Determinarea ariei unui triunghi $\frac{9\sqrt{3}}{2}$ cm²
Determinarea ariei totale $18(21+2\sqrt{3})$ cm²

(2p) b) Determinarea înălțimii unei piramide regulate $\sqrt{3}$ cm
Determinarea lungimii segmentului ~~pe~~ diagonalei $7\sqrt{3}$ cm

(1p) (c) Prezentarea unei numerotări astfel încât oricare sumă S_K este divizibilă cu 3.

(2p) (d) Presupunem că există o numerotare astfel încât $3 \nmid S_i$ și $3 \mid S_j$

Dar $S_1 + S_2 + \dots + S_8 = 1 + \dots + 24 = 12 \cdot 25 \;\vdots\; 3$ și $3 \mid S_j$ $\Rightarrow$